Mục lục

Chương 1
MỘT SỐ VẤN ĐỀ CƠ BẢN VỀ BẤT ĐẲNG THỨC

1.1 Khái niệm và các tính chất của bất đẳng thức

1.1 Số thực dương, số thực âm

- Nếu x là số thực dương, ta ký hiệu $x > 0$
- Nếu x là số thực âm, ta ký hiệu $x < 0$
- Nếu x là số thực dương hoặc $x = 0$, ta nói x là số thực không âm, ký hiệu $x \geqslant 0$
- Nếu x là số thực âm hoặc $x = 0$, ta nói x là số thực không dương, ký hiệu $x \leqslant 0$.

1.1 Khái niệm bất đẳng thức

Định nghĩa 1.1. Số thực a được gọi là lớn hơn số thực b, ký hiệu $a > b$ nếu $a - b$ là một số dương, tức là $a - b > 0$. Khi đó ta cũng ký hiệu $b < a$.

Ta có: $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$.

Nếu $a > b$ hoặc $a = b$, ta viết $a \geqslant b$. Ta có: $a \geqslant b \Leftrightarrow a - b \geqslant 0$.

Định nghĩa 1.2. Giả sử A, B là hai biểu thức bằng số. Khi đó các mệnh đề có dạng:

" A lớn hơn B ", ký hiệu : $A > B$

" A nhỏ hơn B ", ký hiệu :$A < B$

" A lớn hơn hay bằng B " ký hiệu $A \geqslant B$

" A nhỏ hơn hay bằng B " ký hiệu $A \leqslant B$

được gọi là một *bất đẳng thức*.

Quy ước :

- Khi nói về một bất đẳng thức mà không chỉ rõ gì hơn thì ta hiểu rằng đó là một bất đẳng thức đúng.
- Chứng minh một bất đẳng thức là chứng minh bất đẳng thức đó đúng.

1.1 Các tính chất cơ bản của bất đẳng thức

Tính chất 1.1. *(Tính chất bắc cầu) nếu* $\begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases}$ *thì* $a > c$

Tính chất 1.2. $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$

Hệ quả 1: $a > b \Leftrightarrow a - c > b - c$.

Hệ quả 2: $a + c > b \Leftrightarrow a > b - c$.

Tính chất 1.3. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d$

Tính chất 1.4. $a > b \Leftrightarrow \begin{cases} ac > bc \ \text{ nếu } c > 0 \\ ac < bc \text{ nếu } c < 0 \end{cases}$

Hệ quả 3: $a > b \Leftrightarrow -a < -b$.

Hệ quả 4: $a > b \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c} \ \text{ nếu } c > 0 \\ \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c} \text{ nếu } c < 0 \end{cases}$.

Tính chất 1.5. $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd$

Tính chất 1.6. $a > b > 0 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$

Tính chất 1.7. $a > b > 0, n \in N^* \Rightarrow a^n > b^n$

Tính chất 1.8. $a > b > 0, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$

Hệ quả 5:

- Nếu a và b là hai số dương thì : $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$
- Nếu a và b là hai số không âm thì : $a \geqslant b \Leftrightarrow a^2 \geqslant b^2$.

Tính chất 1.9. *Với mọi* $a, b \in \mathbb{R}$ *ta có:*

- $|a+b| \leqslant |a| + |b|$
- $|a-b| \leqslant |a| + |b|$
- $|a+b| = |a| + |b| \Leftrightarrow a.b \geqslant 0$
- $|a-b| = |a| + |b| \Leftrightarrow a.b \leqslant 0$.

1.2 Một số vấn đề cần lưu ý khi giải bài toán về bất đẳng thức

1.2 Dự đoán dấu "=" xảy ra

Trong chứng minh bất đẳng thức, việc dự đoán dấu "=" xảy ra khi nào có ý nghĩa rất quan trọng. Trong một số trường hợp, việc dự đoán dấu "=" xảy ra giúp định hướng tìm lời giải. Thông thường, với các bất đẳng thức đối xứng ba biến thì đẳng thức xảy ra khi ba biến bằng nhau, với các bất đẳng thức hoán vị thì đẳng thức có khi hai biến bằng nhau, với các bất đẳng thức có biến thuộc đoạn $[\alpha;\beta]$ thì đẳng thức xả ra khi có một biến bằng α hoặc $\beta, \cdots$

Ví dụ 1.1

Cho các số thực $x, y, z > 0$ thỏa $x + y + z \leqslant 3$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2 + \frac{3}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{3}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{3}{z^2}} \geqslant 6.$$

Lời giải. Ta dự đoán dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = 1$.
Khi $x = 1$ thì $x^2 = 1$ và $\frac{3}{x^2} = 3$ nên ta áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 4 số ta được

$$x^2 + \frac{3}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \geqslant \frac{4}{x}.$$

Tương tự

$$y^2 + \frac{3}{y^2} \geqslant \frac{4}{y} \text{ và } z^2 + \frac{3}{z^2} \geqslant \frac{4}{z}.$$

Do đó

$$\sqrt{x^2 + \frac{3}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{3}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{3}{z^2}} \geqslant 2\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}\right) \geqslant \frac{18}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}.$$

Mặt khác $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leqslant \sqrt{3(x + y + z)} \leqslant 3$ nên ta có

$$\sqrt{x^2 + \frac{3}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{3}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{3}{z^2}} \geqslant \frac{18}{3} = 6 \text{ (đpcm)}.$$

■

Ví dụ 1.2

Cho các số thực không âm x, y, z đôi một khác nhau. Chứng minh rằng

$$(xy + yz + zx)\left(\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}\right) \geqslant 4.$$

Lời giải. Vì $x, y, z \geqslant 0$ nên ta dự đoán dấu "=" xảy ra khi có một số bằng 0. Ta giả sử $z = \min\{x, y, z\}$, ta có

$$xy + yz + zx \geqslant xy;\ \frac{1}{(y-z)^2} \geqslant \frac{1}{y^2} \text{ và } \frac{1}{(z-x)^2} \geqslant \frac{1}{x^2}.$$

Suy ra

$$VT \geqslant xy\left[\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right] = \frac{1}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{1}{t-2} + t$$

Với $t = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2$.
Ta chứng minh

$$\frac{1}{t-2} + t \geqslant 4 \Leftrightarrow 1 + t^2 - 2t \geqslant 4t - 8 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 9 \geqslant 0 \Leftrightarrow (t-3)^2 \geqslant 0.$$

Bất đẳng thức cuối luôn đúng. Vậy bài toán được chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi $z = 0$ $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}y,\ y > 0.$ ■

Ví dụ 1.3

Cho $a, b, c > 0$ thỏa $a + 4b + 9c = 6$.Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 \geqslant \frac{1}{6}.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho ba số thực dương ta có

$$a^3 + x^3 + x^3 \geqslant 3x^2a \text{ hay } a^3 + 2x^3 \geqslant 3x^2a.$$

Tương tự: $b^3 + 2y^3 \geqslant 3y^2b,\ c^3 + 2z^3 \geqslant 3z^2c$ với x, y, z là các số thực dương.
Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế ta có được:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 2\left(x^3 + y^3 + z^3\right) \geqslant 3\left(x^2a + y^2b + z^2c\right).$$

Ta chọn x, y, z sao cho

$$x^2 = \frac{y^2}{4} = \frac{z^2}{9} = k^2 \Rightarrow x = k, y = 2k, z = 3k.$$

Mà

$$a+4b+9c=6 \Rightarrow k+8k+27k=6 \Rightarrow k=\frac{1}{6} \Rightarrow x=\frac{1}{6}, y=\frac{1}{3}, z=\frac{1}{2}.$$

Suy ra $a^3+b^3+c^3 \geqslant \frac{1}{6}$. Đẳng thức xảy ra khi $a=\frac{1}{6},\ b=\frac{1}{3},\ c=\frac{1}{2}$. ■

1.2 Kĩ thuật chuẩn hóa

• Bất đẳng thức thuần nhất: Bất đẳng thức có dạng

$$f(a_1,a_2,\cdots.,a_n) \geqslant 0 \text{ (1) với } a_i \in D\ .$$

Được gọi là thuần nhất nếu

$$f(ka_1,ka_2,\cdots.,ka_n)=f(a_1,a_2,\cdots.,a_n) \text{ với mọi } k \in D.$$

• Nếu (1) là bất đẳng thức thuần nhất thì ta có thể giả sử $g(a_1,a_2,\cdots.,a_n)=0$ với $g(a_1,a_2,\cdots.,a_n)$ là một biểu thức thuần nhất.

Ví dụ 1.4

Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{a(b+c)}{(b+c)^2+a^2}+\frac{b(c+a)}{(c+a)^2+b^2}+\frac{c(a+b)}{(a+b)^2+c^2} \leqslant \frac{6}{5}.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a+b+c=3$. Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{a(3-a)}{(3-a)^2+a^2}+\frac{b(3-b)}{(3-b)^2+b^2}+\frac{c(3-c)}{(3-c)^2+c^2} \leqslant \frac{6}{5}.$$

Hay là

$$\frac{1}{2a^2-6a+9}+\frac{1}{2b^2-6b+9}+\frac{1}{2c^2-6c+9} \leqslant \frac{3}{5} \qquad (1).$$

Ta tìm đánh giá

$$\frac{1}{2a^2-6a+9} \leqslant m(a-1)+\frac{1}{5} \qquad (2).$$

Ta tìm m sao cho (2) đúng với mọi $a \in (0;3)$ và đẳng thức xảy ra khi $a = 1$. Ta biến đổi (2) như sau

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{2a^2 - 6a + 9} + m(a-1) \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{2a^2 - 6a + 4}{2a^2 - 6a + 9} + 5m(a-1) \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)\left[\frac{2(a-2)}{2a^2 - 6a + 9} + 5m\right] \geqslant 0 \qquad (3).$$

Ta chọn m sao cho phương trình $\frac{2(a-2)}{2a^2 - 6a + 9} + 5m = 0$ có nghiệm $a = 1$, hay là

$$-\frac{2}{5} + 5m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2}{25}.$$

Khi đó (3) tương đương với

$$(a-1)\left(\frac{a-2}{2a^2 - 6a + 9} + \frac{1}{5}\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow (a-1)\left(2a^2 - a - 1\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow (a-1)^2(2a+1) \geqslant 0.$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng. Vậy bài toán được chứng minh.

■

Ví dụ 1.5

Cho các số thực a, b, c. Chứng minh rằng

$$6(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \leqslant 27abc + 10\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^3}.$$

Lời giải. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a^2 + b^2 + c^2 = 9$ và $|a| \geqslant |b| \geqslant |c|$. Khi đó , bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$2(a+b+c) \leqslant abc + 10 \Leftrightarrow 2(a+b+c) - abc \leqslant 10.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$2(a+b+c) - abc = a(2-bc) + 2(b+c) \leqslant \sqrt{\left[a^2 + (b+c)^2\right].\left[(2-bc)^2 + 4\right]}$$

$$= \sqrt{(9+2bc)\left(b^2c^2 - 4bc + 8\right)}.$$

Ta chứng minh

$$(9+2bc)\left(b^2c^2-4bc+8\right) \leqslant 100 \Leftrightarrow 2(bc)^3+(bc)^2-20bc-28 \leqslant 0$$

$$\Leftrightarrow (2bc-7)\left((bc)^2+4(bc)+4\right) \leqslant 0 \Leftrightarrow (2bc-7)(bc+2)^2 \leqslant 0 \qquad (4).$$

Vì

$$9=a^2+b^2+c^2 \leqslant 3a^2 \Rightarrow a^2 \geqslant 3 \Rightarrow b^2+c^2 \leqslant 6.$$

Suy ra $2bc-7 \leqslant b^2+c^2-7 \leqslant -1<0$ nên (4) đúng. Vậy bài toán được chứng minh. ■

Ví dụ 1.6

Cho các số thực dương a,b,c thỏa $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1} \leqslant 1.$$

Lời giải. Ta viết lại bất đẳng thức cần chứng minh như sau

$$\frac{1}{a+b+\sqrt[3]{abc}}+\frac{1}{b+c+\sqrt[3]{abc}}+\frac{1}{c+a+\sqrt[3]{abc}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}.$$

Hay là

$$\frac{1}{x^3+y^3+xyz}+\frac{1}{y^3+z^3+xyz}+\frac{1}{z^3+x^3+xyz} \leqslant \frac{1}{xyz}.$$

Với $x=\sqrt[3]{a},\ y=\sqrt[3]{b},\ z=\sqrt[3]{c}$. Ta có

$$x^3+y^3 \geqslant xy(x+y) \Rightarrow x^3+y^3+xyz \geqslant xy(x+y+z)$$

Do đó

$$\frac{1}{x^3+y^3+xyz} \leqslant \frac{1}{xyz}.\frac{z}{x+y+z}.$$

Tương tự:

$$\frac{1}{y^3+z^3+xyz} \leqslant \frac{1}{xyz}.\frac{x}{x+y+z} \text{ và } \frac{1}{z^3+x^3+xyz} \leqslant \frac{1}{xyz}.\frac{y}{x+y+z}.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta có đpcm. ■

Nguyễn Tất Thu

Ví dụ 1.7

Cho $x, y, z > 0$ và $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng :

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 3\left(x^2 y + y^2 z + z^2 x\right).$$

Lời giải. Ta biến đổi bất đẳng thức cần chứng minh như sau

$$\left(x^2 + y^2 + z^2\right)(x + y + z) \geqslant 3\left(x^2 y + y^2 z + z^2 x\right)$$

Hay

$$x^3 + y^3 + z^3 + x^2 z + y^2 x + z^2 y \geqslant 2\left(x^2 y + y^2 z + z^2 x\right) \quad (5).$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$x^3 + xy^2 \geqslant 2x^2 y;\ y^3 + yz^2 \geqslant 2y^2 z \text{ và } z^3 + zx^2 \geqslant 2z^2 x.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta có bất đẳng thức (5). Vậy bài toán được chứng minh. ■

1.2 Bài tập

Bài tập 1.1. Cho $a, b, c > 0$.Chứng minh:

$$abc(a + b + c) + (a^2 + b^2 + c^2)^2 \geqslant 4\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)}abc.$$

Bài tập 1.2. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca}\right) \geqslant 4.$$

Bài tập 1.3. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$7(a + b + c)(ab + bc + ca) \leqslant 9abc + 2(a + b + c)^3.$$

Bài tập 1.4. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqslant 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Nguyễn Tất Thu

Bài tập 1.5. Cho các số thực dương thỏa mãn $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}=3$. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant \sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{b^4}+\sqrt[3]{c^4}.$$

1.3 Hướng dẫn, đáp số

Chương 2
CÁC BẤT ĐẲNG THỨC CỔ ĐIỂN

2.1 Bất đẳng thức AM-GM

Bất đẳng thức $AM-GM$ là bất đẳng thức cổ điển được sử dụng nhiều trong các bài toán chứng minh bất đẳng thức. Ta biết trung bình cộng của nsố thực $a_1,a_2,\cdots,a_n$ là số $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ và trung bình nhân của n số đó là $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ (với điều kiện là $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ tồn tại). Bất đẳng thức $AM-GM$ cho chúng ta đánh giá giữa trung bình cộng của các số thực không âm và trung bình nhân của chúng. Cụ thể như sau:

2.1 Bất đẳng thức AM-GM

Định lí 2.1. ***(BĐT AM-GM)*** *Cho n số thực không âm a_1, a_2, $\cdots$, a_n. ta có*

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}$$

đẳng thức xảy ra khi $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

Chứng minh. Có nhiều cách đề chứng minh bất đẳng thức $AM-GM$, dưới đây ta sẽ chứng minh bất đẳng thức $AM-GM$ bằng phương pháp quy nạp.

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức $AM-GM$ cho trường hợp

$n = 2$. Tức là, cần chứng minh

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1.a_2}$$

Bất đẳng thức này tương đương với

$$a_1 + a_2 \geqslant 2\sqrt{a_1}a_2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2 \geqslant 0$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2$.
Tiếp theo ta chứng minh cho trường hợp $n = 4$. Tức là cần chứng minh

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geqslant \sqrt[4]{a_1.a_2.a_3.a_4}$$

Áp dụng trường hợp $n = 2$ ta có

$$\frac{a_1 + a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1.a_2}$$

và

$$\frac{a_3 + a_4}{2} \geqslant \sqrt{a_3.a_4}$$

Do đó

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{\dfrac{a_1 + a_2}{2} + \dfrac{a_3 + a_4}{2}}{2} \geqslant \frac{\sqrt{a_1a_2} + \sqrt{a_3a_4}}{2} \geqslant \sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}$$

Nên trường hợp $n = 4$ được chứng minh.
Tiếp đến ta chứng minh trường hợp $n = 3$, tức là chứng minh

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geqslant \sqrt[3]{a_1.a_2.a_3}$$

Đặt $a_4 = \dfrac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$. Áp dụng cho trường hợp $n = 4$ ta có

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geqslant \sqrt[4]{a_1.a_2.a_3.a_4}$$

Hay

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dfrac{a_1 + a_2 + a_3}{3}}{4} \geqslant \sqrt[4]{a_1.a_2.a_3.\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}}$$

Suy ra

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3} \geqslant \sqrt[3]{a_1.a_2.a_3}$$

(đpcm). Để chứng minh cho trường hợp tổng quát ta chứng minh theo hai bước sau:

Bước 1: Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n=2^m$

+) Với $m=1$, ta có $n=2$nên bất đẳng thức đúng với $m=1$

+) Giả sử bất đẳng thức đúng với $n=2^{m-1}$, ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n=2^m$.

Tức là

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^{m-1}}+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\ (1)$$

Đặt

$$x=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^{m-1}}}{2^{m-1}}, y=\frac{a_{2^{m-1}+1}+a_{2^{m-1}+2}+\cdots+a_{2^m}}{2^{m-1}}$$

Theo giả thiết quy nạp ta có

$$x \geqslant \sqrt[2^{m-1}]{a_1a_2\cdots a_{2^{m-1}}}, y \geqslant \sqrt[2^{m-1}]{a_{2^{m-1}+1}\cdots a_n}$$

Áp dụng cho trường hợp $n=2$ ta có:

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$$

Hay

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2^{m-1}}+a_{2^{m-1}+1}+\cdots+a_n}{2^m} \geqslant \sqrt[2^m]{a_1a_2\cdots a_n}$$

Hay (1) được chứng minh.

Bước 2: Ta chứng minh nếu bất đẳng thức đúng với $n \geqslant 2$ thì cũng đúng với $n-1$

Gải sử

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

Ta chứng minh

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1} \geqslant \sqrt[n-1]{a_1.a_2\cdots a_{n-1}}$$

Thật vậy: Đặt $a_n = \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}$. ÁP dụng bất đẳng thức Cô si cho n số ta có

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

Hay

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_{n-1}.=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}}$$

Suy ra

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1} \geqslant \sqrt[n-1]{a_1.a_2\cdots a_{n-1}}$$

(đpcm). Từ hai bước trên ta có bất đẳng thức $AM-GM$ được chứng minh. □

2.1 Các hệ quả

Cho các số thực dương $a_1,a_2,\cdots,a_n$. Ta có

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n} \geqslant \frac{n^2}{a_1+a_2+\cdots.+a_n}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

2.1 Các ví dụ

Ví dụ 2.1

Cho $a,b,c>0$ thỏa $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$a^5+b^5+c^5 \geqslant 3.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$a^5+a^5+1+1+1 \geqslant 3a^2 \text{ hay } 2a^5+3 \geqslant 3a^2.$$

Tương tự

Nguyễn Tất Thu

$$2b^5+3 \geqslant 3b^2 \text{ và } 2c^5+3 \geqslant 3c^2.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta có đpcm. ■

Nhận xét 1. *Ta có bài toán tổng quát như sau Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=3$ (hoặc $abc=1$) và $m,n \in \mathbb{N}, m \geqslant n$. Khi đó*

$$a^m+b^m+c^m \geqslant a^n+b^n+c^n \qquad (1).$$

Bất đẳng thức (1) còn đúng khi m,n là các số hữu tỉ dương. Và ta có thể tổng quát 3 biến thành k biến.

Ví dụ 2.2

Cho $a,b,c>0$ thỏa $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng

$$a^3+b^3+c^3 \geqslant 3.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$a^3+b^3+1 \geqslant 3ab$

$b^3+c^3+1 \geqslant 3bc$

$c^3+a^3+1 \geqslant 3ca$. Cộng ba bất đẳng thức trên ta có đpcm. ■

Ví dụ 2.3

Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^4}{b^2(c+a)}+\frac{b^4}{c^2(a+b)}+\frac{c^4}{a^2(b+c)} \geqslant \frac{a+b+c}{2}.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\frac{a^4}{b^2(c+a)}+\frac{b}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c+a}{4} \geqslant 2a$$

hay

$$\frac{a^4}{b^2(c+a)}+b+\frac{c+a}{4} \geqslant 2a.$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{b^4}{c^2(a+b)}+c+\frac{a+b}{4}\geqslant 2b \text{ và } \frac{c^4}{a^2(b+c)}+a+\frac{b+c}{4}\geqslant 2c.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế ta có đpcm. ■

Ví dụ 2.4

Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\left(\frac{2a}{b+c}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(\frac{2b}{c+a}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{2c}{a+b}\right)^3}\geqslant 3.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$a+b+c=a+\frac{b+c}{2}+\frac{b+c}{2}\geqslant 3\sqrt[3]{a\frac{(b+c)^2}{4}},$$

suy ra

$$\sqrt[3]{\left(\frac{2a}{b+c}\right)^2}\geqslant\frac{3a}{a+b+c}.$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có

$$\sqrt[3]{\left(\frac{2b}{c+a}\right)^3}\geqslant\frac{3b}{a+b+c} \text{ và } \sqrt[3]{\left(\frac{2c}{a+b}\right)^2}\geqslant\frac{3c}{a+b+c}.$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế ta có đpcm. ■

Ví dụ 2.5

(BĐT AM-GM suy rộng) Cho $a_i\geqslant 0$ $(i=\overline{1,n})$ và các số hữu tỉ dương α_i thỏa mãn $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$. Chứng minh rằng:

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i\geqslant a_1^{\alpha_1}.a_2^{\alpha_2}\cdots a_n^{\alpha_n}.$$

Lời giải. Vì α_i là các số hữu tỉ dương và $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ nên tồn tại các số nguyên dương $N, k_1, k_2, \cdots, k_n$ sao cho $\alpha_i = \dfrac{k_i}{N}$. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho N số, ta có

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot a_i = \frac{\underbrace{a_1 + a_1 + \cdots + a_1}_{k_1 \text{ số}} + \cdots + \underbrace{a_n + a_n + \cdots + a_n}_{k_n \text{ số}}}{N} \geqslant a_1^{\frac{k_1}{N}} \cdots a_n^{\frac{k_n}{N}} = a_1^{\alpha_1} \cdots a_n^{\alpha_n}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. ■

Ví dụ 2.6

Cho các số thực dương $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Chứng minh rằng

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geqslant \left(1 + \sqrt[n]{a_1.a_2\cdots a_n}\right)^n.$$

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{1}{\sqrt[n]{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}} + \sqrt[n]{\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)}} \leqslant 1 \qquad (1).$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$VT(1) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{1}\frac{1}{1+a_i} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{1}\frac{a_i}{1+a_i} = 1.$$

Bài toán được chứng minh. ■

Ví dụ 2.7

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2} \text{ (Bất đẳng thức Nesbit).}$$

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{a}{b+c} + 1\right) + \left(\frac{b}{c+a} + 1\right) + \left(\frac{c}{a+b} + 1\right) \geqslant \frac{9}{2}$$

Hay
$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geqslant\frac{9}{2}\qquad(1).$$
Ta có
$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geqslant\frac{9}{a+b+b+c+c+a}=\frac{9}{2(a+b+c)}$$
Nên (1) đúng. ■

Ví dụ 2.8

Cho các số thực dương a,b,c thỏa $a+b+c=1$. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\geqslant 30.$$

Lời giải. Ta có:
$$ab+bc+ca\leqslant\frac{(a+b+c)^2}{3}=\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\geqslant\frac{9}{ab+bc+ca}$$
$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\geqslant\frac{9}{(a+b+c)^2}=9.$$
Do đó
$$VT\geqslant\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{9}{ab+bc+ca}$$
$$=\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{7}{ab+bc+ca}\geqslant 9+\frac{7}{\frac{1}{3}}=30.$$
Ta có điều phải chứng minh. ■

Ví dụ 2.9

Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn : $xy+yz+zx=3$.Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{xyz}+\frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)}\geqslant\frac{3}{2}.$$

Lời giải. Ta có:

$$\sqrt[3]{xyz(x+y)(y+z)(z+x)} \leqslant \frac{x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)}{3} = 2.$$

Suy ra

$$\frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geqslant \frac{xyz}{2}$$

Do đó

$$VT \geqslant \frac{1}{xyz} + \frac{xyz}{2} \geqslant \frac{1}{2xyz} + \frac{xyz}{2} + \frac{1}{2xyz} \geqslant 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Bài toán được chứng minh. ■

Ví dụ 2.10

Cho các số thực dương a, b, c thỏa $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} + \frac{bc}{\sqrt{a^2+3}} + \frac{ca}{\sqrt{b^2+3}} \leqslant \frac{3}{2}.$$

Lời giải. Ta có

$$3(ab+bc+ca) \leqslant (a+b+c)^2 = 9 \Rightarrow ab+bc+ca \leqslant 3$$

Suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{c^2+3}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{c^2+ab+bc+ca}} = \frac{1}{\sqrt{(a+c)(b+c)}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c}\right).$$

Do đó:

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c}\right)$$

Tương tự:

$$\frac{bc}{\sqrt{a^2+3}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a+b} + \frac{bc}{a+b}\right) \text{ và } \frac{ca}{\sqrt{b^2+3}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{ca}{b+a} + \frac{ca}{b+c}\right)$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế ta có:

$$\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} + \frac{bc}{\sqrt{a^2+3}} + \frac{ca}{\sqrt{b^2+3}} \leqslant \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{3}{2}.$$

■

Ví dụ 2.11

(IMO 2001) Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b^2}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c^2}{\sqrt{c^2+8ab}}\geqslant 1.$$

Lời giải. Gọi P là vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a+b+c=1$.
Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+a\left(a^2+8bc\right)\geqslant 3a \Leftrightarrow \frac{2a}{\sqrt{a^2+8bc}}+a\left(a^2+8bc\right)\geqslant 3a.$$

Tương tự :

$$\frac{2b}{\sqrt{b^2+8ca}}+b\left(b^2+8ca\right)\geqslant 3b\ ;\ \frac{2c}{\sqrt{c^2+8ab}}+c\left(c^2+8ab\right)\geqslant 3c$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại với nhau ta được :

$$2P+a^3+b^3+c^3+24abc\geqslant 3$$

Mặt khác ta lại có :

$$1=(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant a^3+b^3+c^3+24abc.$$

Suy ra :

$$2P\geqslant 3-\left(a^3+b^3+c^3+24abc\right)\geqslant 3-1=2\Rightarrow P\geqslant 1 \text{ đpcm.}$$

■

Ví dụ 2.12

(IMO 2005) Cho các số thực dương x, y, z thỏa $xyz \geqslant 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2} \geqslant 0.$$

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$1-\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+1-\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+1-\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2} \leqslant 3$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2+z^2\right)\left(\frac{1}{x^5+y^2+z^2}+\frac{1}{y^5+z^2+x^2}+\frac{1}{z^5+x^2+y^2}\right) \leqslant 3 \qquad (1).$$

Ta có

$$x^5+y^2+z^2 \geqslant \frac{x^4}{yz}+y^2+z^2 \geqslant \frac{2x^4+\left(y^2+z^2\right)^2}{y^2+z^2} \geqslant \frac{2}{3}.\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{y^2+z^2}.$$

Do đó

$$\frac{1}{x^5+y^2+z^2} \leqslant \frac{3}{2}\frac{y^2+z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$$

Chứng minh tương tự

$$\frac{1}{y^5+z^2+x^2} \leqslant \frac{3}{2}\frac{z^2+x^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2} \text{ và } \frac{1}{z^5+x^2+y^2} \leqslant \frac{3}{2}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

Suy ra

$$\frac{1}{x^5+y^2+z^2}+\frac{1}{y^5+z^2+x^2}+\frac{1}{z^5+x^2+y^2} \leqslant \frac{3}{x^2+y^2+z^2}$$

Hay (1) đúng. ■

Nguyễn Tất Thu

Ví dụ 2.13

(IMO Shortlist 2009) Cho các số thực dương a,b,c thỏa $ab+bc+ca \leqslant 3abc$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{b+c}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{c+a}}+3 \leqslant \sqrt{2}\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\right).$$

Lời giải. Ta có

$$\sqrt{2(a+b)}=\sqrt{\frac{2(a+b)^2}{a+b}}=\sqrt{2\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{2ab}{a+b}\right)} \geqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}}+\sqrt{\frac{2ab}{a+b}}.$$

Suy ra

$$VP \geqslant \sqrt{\frac{2ab}{a+b}}+\sqrt{\frac{2bc}{b+c}}+\sqrt{\frac{2ca}{c+a}}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{b+c}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{c+a}}.$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức

$$\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)(x+y+z)^2 \geqslant 27$$

ta suy ra

$$x+y+z \geqslant 3\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}}}$$

Do đó

$$\sqrt{\frac{2ab}{a+b}}+\sqrt{\frac{2bc}{b+c}}+\sqrt{\frac{2ca}{c+a}} \geqslant 3\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{\left(\sqrt{\frac{a+b}{2ab}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{b+c}{2bc}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{c+a}{2ca}}\right)^2}}$$

$$=3\sqrt{\frac{3abc}{ab+bc+ca}}=3.$$

Từ đó, ta có đpcm. ■

Nguyễn Tất Thu

Ví dụ 2.14

(IMO 2012) Cho các số thực dương $a_2, a_3, \cdots., a_n$ thỏa mãn $a_2a_3\cdots.a_n = 1$. Chứng minh rằng

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3\cdots.(1+a_n)^n > n^n.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$(1+a_k)^k = \left(\frac{1}{k-1}+\frac{1}{k-1}+\cdots+\frac{1}{k-1}+a_k\right)^k \geqslant \frac{k^k a_k}{(k-1)^{k-1}}.$$

Suy ra

$$(1+a_2)^2.(1+a_3)^3\cdots(1+a_n)^n \geqslant \frac{2^2}{1^1}.\frac{3^3}{2^2}.\frac{4^4}{3^3}\cdots\frac{n^n}{(n-1)^n}a_1a_2\cdots a_n = n^n.$$

Ta thấy không có đẳng thức xảy ra. Vậy bài toán được chứng minh. ■

Ví dụ 2.15

(Moldova TST 2014) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$a^3+b^3+c^3+\frac{ab}{a^2+b^2}+\frac{bc}{b^2+c^2}+\frac{ca}{c^2+a^2} \geqslant \frac{9}{2}.$$

Lời giải. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$2\left(a^3+b^3+c^3\right)+\frac{2ab}{a^2+b^2}+\frac{2bc}{b^2+c^2}+\frac{2ca}{c^2+a^2} \geqslant 9 \qquad (1).$$

Ta có $x^3+y^3 \geqslant x^2y+y^2x$ với mọi $x, y > 0$ nên

$$a^3+b^3+c^3 \geqslant \frac{c\left(a^2+b^2\right)}{2}+\frac{b\left(c^2+a^2\right)}{2}+\frac{a\left(b^2+c^2\right)}{2}$$

Suy ra

$$VT(1) \geqslant \left(\frac{c\left(a^2+b^2\right)}{2}+\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)+\left(\frac{b\left(c^2+a^2\right)}{2}+\frac{2bc}{b^2+c^2}\right)+\left(\frac{a\left(b^2+c^2\right)}{2}+\frac{2ca}{c^2+a^2}\right)+3abc$$

Bài toán được chứng minh. ■

Ví dụ 2.16

Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\geqslant\frac{a+b+c}{2}.$$

Lời giải. Ta có

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}=\frac{a\left(a^2+b^2\right)-ab^2}{a^2+b^2}=a-\frac{ab^2}{a^2+b^2}\geqslant a-\frac{b}{2}.$$

Tương tự

$$\frac{b^3}{b^2+c^2}\geqslant b-\frac{c}{2} \text{ và } \frac{c^3}{c^2+a^2}\geqslant c-\frac{a}{2}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế ta có đpcm. ■

Ví dụ 2.17

Cho các số thực a,b,c thỏa $abc<0$ và $a+b+c=0$. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(1-ab-bc-ca)+\frac{12abc-8}{ab+bc+ca}\geqslant 16.$$

Lời giải. Gọi P là vế trái của bất đẳng thức.
Đặt $m=-(ab+bc+ca), n=-abc$
Do $a+b+c=0\Rightarrow 2(ab+bc+ca)=-\left(a^2+b^2+c^2\right)<0\Rightarrow m,n>0$
Khi đó:

$$P=\frac{m(1+m)}{n}+\frac{12n+8}{m}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô sita có:

$$m^3+8n^2+8n\geqslant 12mn \text{ và } m^2+4n^2\geqslant 4mn$$

Suy ra

$$m^3 + m^2 + 12n^2 + 8n \geqslant 16mn$$

Do đó:

$$P = \frac{m(1+m)}{n} + \frac{12n+8}{m} \geqslant 16$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m = 2, n = 1$, tức là a, b, c là ba nghiệm của phương trình

$$x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

■

2.1 Bài tập

Bài tập 2.1. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

1. $(1+a)(1+b)(1+c) \geqslant \left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3$. Hãy tổng quát hóa lên n biến và chứng minh.
2. $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geqslant 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$.

Lời giải. 1. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt[3]{\frac{1.1.1}{(1+a)(1+b)(1+c)}} + \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}} \leqslant 1.$$

Đặt :

$$T = \sqrt[3]{\frac{1.1.1}{(1+a)(1+b)(1+c)}} + \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}}$$

$$T \leqslant \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}\right] + \frac{1}{3}\left[\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}\right]$$

$$T \leqslant \frac{1}{3}\left[\frac{a+1}{1+a} + \frac{b+1}{1+b} + \frac{c+1}{1+c}\right] = \frac{1}{3}.3 = 1$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c \geqslant 0$.

2.

■

Bài tập 2.2. Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$(1+a)(1+b)(1+c) \geqslant 64abc.$$

Bài tập 2.3. Cho $2n$ số thực dương $a_1,a_2,\cdots.,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n)} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2\cdots b_n}.$$

Bài tập 2.4. Cho $3n$ số thực dương $a_1,a_2,\cdots,a_n;\ b_1,b_2,\cdots,b_n;\ c_1,c_2,\cdots,c_n$. Chứng minh rằng

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i+\prod_{i=1}^n b_i+\prod_{i=1}^n c_i\right)^n \leqslant \prod_{i=1}^n \left(a_i^n+b_i^n+c_i^n\right)$$

Bài tập 2.5. Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$(a+b+c)^3 \geqslant a^3+b^3+c^3+24abc.$$

Bài tập 2.6. Cho n số thực dương $a_1,a_2,\cdots,a_n$ và số nguyên dương k. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1^k+a_2^k+\cdots+a_n^k}{n} \geqslant \left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^k.$$

Bài tập 2.7. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+3b}+\frac{1}{b+3c}+\frac{1}{c+3a} \geqslant \frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{b+2c+a}+\frac{1}{c+2a+b}.$$

Bài tập 2.8. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(c+a)} \geqslant \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

Bài tập 2.9. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn điều kiện $a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3=3$. Chứng minh rằng:

$$a^7+b^7+c^7 \geqslant 3.$$

Nguyễn Tất Thu

Bài tập 2.10. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$a^4+b^4+c^4 \geqslant \left(\frac{a+2b}{3}\right)^4+\left(\frac{b+2c}{3}\right)^4+\left(\frac{c+2a}{3}\right)^4.$$

Bài tập 2.11. Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a+\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{b+\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\frac{c}{c+\sqrt{(c+a)(c+b)}} \leqslant 1.$$

Bài tập 2.12. (Baltic Way 2014) Cho các số thực dương a,b,c thỏa $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+b}}+\frac{1}{\sqrt{b^3+c}}+\frac{1}{\sqrt{c^3+a}} \leqslant \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

HD:$\sum\frac{1}{\sqrt{a^3+b}} \leqslant \sum\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{a^3b}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum\sqrt[4]{\left(\frac{1}{a}\right)^3\cdot\frac{1}{b}} \leqslant \frac{1}{4\sqrt{2}}\sum\left(\frac{3}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{3}{\sqrt{2}}.$

Bài tập 2.13. (USA 2011) Với a,b,c là các số thực dương thỏa $a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2 \leqslant 4$, chứng minh rằng

$$\frac{ab+1}{(a+b)^2}+\frac{bc+1}{(b+c)^2}+\frac{ca+1}{(c+a)^2} \geqslant 3.$$

HD: Ta có $ab+1 \geqslant \frac{2ab+a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{2}=\frac{(a+b)^2+(c+a)(c+b)}{2}$.

Bài tập 2.14. Cho các số thực dương a,b,c thỏa $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{b^3+c^3}{2}}+\sqrt[3]{\frac{c^3+a^3}{2}}+6 \leqslant 3(a+b+c).$$

HD: Bài toán này có thể chứng minh bằng cách sử dụng đánh giá sau:

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \leqslant \frac{a^2+b^2}{a+b}$$

Nguyễn Tất Thu

Chú ý rằng: $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}=a+b-\dfrac{2ab}{a+b}$
Như vậy ta phải chứng minh:

$$2\left[\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\right]+a+b+c\geqslant 6$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM với $abc=1$,ta có ngay:

$$\frac{2ab}{a+b}+\frac{a+b}{2}+\frac{2bc}{b+c}+\frac{b+c}{2}+\frac{2ca}{c+a}+\frac{c+a}{2}\geqslant 6$$

Vậy ta có ìiều phải chứng minh.Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài tập 2.15. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+2b^2+15}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+2c^2+15}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+2a^2+15}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Bài tập 2.16. Cho các số thực dương x,y. Chứng minh rằng

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x+3y}}+\frac{1}{\sqrt{y+3x}}\right)\leqslant 2.$$

Bài tập 2.17. (JBMO 2014) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2\geqslant 3(a+b+c+1).$$

Lời giải. Ta có

$$\sum\left(a+\frac{1}{b}\right)^2\geqslant\sum\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)=\sum ab+\sum\frac{a}{c}+\sum\frac{1}{ab}+3.$$

Áp dụng $\sum\frac{1}{ab}=\sum a$ và $\sum ab+\sum\frac{a}{c}\geqslant 2\sum a$. ta có đpcm.
Cách 2: Ta có

$$a^2+\frac{1}{b^2}+\frac{b}{c}\geqslant 3\sqrt[3]{a^2\cdot\frac{1}{b^2}\cdot\frac{b}{c}}=3\sqrt[3]{\frac{a^2}{bc}}=3\sqrt[3]{\frac{a^2\cdot abc}{bc}}=3a.$$

Nguyễn Tất Thu

Tương tự
$$b^2+\frac{1}{c^2}+\frac{c}{a}\geqslant 3b,$$
và
$$c^2+\frac{1}{a^2}+\frac{a}{b}\geqslant 3c.$$
Kết hợp với
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}=3.$$
ta có đpcm. ■

Bài tập 2.18. Cho các số thực dương a,b thỏa mãn $ab\geqslant 1$. Chứng minh rằng
$$\left(a+2b+\frac{2}{a+1}\right)\left(b+2a+\frac{2}{b+1}\right)\geqslant 16.$$

Lời giải. Ta có $b+2a+\dfrac{2}{b+1}\geqslant \frac{5}{2}+\frac{3}{2}a$ nên
$$\left(a+2b+\frac{2}{a+1}\right)\left(b+2a+\frac{2}{b+1}\right)\geqslant\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}a\right)\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}b\right)$$
và
$$\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}a\right)\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}b\right)=\frac{25}{4}+\frac{15}{4}(a+b)+\frac{9}{4}ab\geqslant 16$$
nên ta có đpcm. ■

Bài tập 2.19. Cho các số thực dương a,b,c thỏa:
$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}=\frac{7-abc}{\sqrt{2}}.$$
Chứng minh rằng:
$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}.$$

Bài tập 2.20. (IMO Shortlist 2009) Cho các số thực dương a,b,c thỏa $a+b+c=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$. Chứng minh rằng
$$\frac{1}{(2a+b+c)^2}+\frac{1}{(2b+c+a)^2}+\frac{1}{(2c+a+b)^2}\leqslant\frac{3}{16}.$$

Nguyễn Tất Thu

Bài tập 2.21. Cho các số thực dương a,b,c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\left(\frac{5}{8}+\frac{a}{b+c}\right)\left(\frac{5}{8}+\frac{b}{c+a}\right)}+\sqrt{\left(\frac{5}{8}+\frac{b}{c+a}\right)\left(\frac{5}{8}+\frac{c}{a+b}\right)}+\sqrt{\left(\frac{5}{8}+\frac{c}{a+b}\right)\left(\frac{5}{8}+\frac{a}{b+c}\right)}.$$

Bài tập 2.22. Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn:

$$\sqrt[3]{a^3+b^3}+\sqrt[3]{b^3+c^3}+\sqrt[3]{c^3+a^3}+abc=3.$$

Chứng minh rằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a^3}{b^2+c^2}+\frac{b^3}{c^2+a^2}+\frac{c^3}{a^2+b^2}$$

bằng $\dfrac{m}{2\sqrt[3]{2}}$, trong đó m là nghiệm của phương trình $t^3+54t-162=0$.

Bài tập 2.23. (VN TST 2010) Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $16(a+b+c)\geqslant \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\left(a+b+\sqrt{2(a+c)}\right)^3}+\frac{1}{\left(b+c+\sqrt{2(b+a)}\right)^3}+\frac{1}{\left(c+a+\sqrt{2(c+b)}\right)^3}\leqslant\frac{8}{9}.$$

Bài tập 2.24. (USA TST 2010) Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^5(b+2c)^2}+\frac{1}{b^2(c+2a)^2}+\frac{1}{c^5(a+2b)^2}\geqslant\frac{1}{3}.$$

2.2 Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

2.2 Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng đa thức

Định lí 2.2. *Cho $2n$ số thực $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$. Khi đó, ta có*

$$\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a_i=kb_i$ với mọi $i=1,2,\cdots,n$.

Chứng minh. Nếu $a_i = 0\ \forall i = \overline{1,n}$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng.
Nếu $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$, ta xét tam thức

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)x^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i.b_i\right)x + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

Ta có

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x - b_i)^2 \geqslant\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Do đó

$$\Delta' = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \leqslant 0$$

Hay bất đẳng thức được chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi $a_i x - b_i = 0 \Leftrightarrow a_i = k.b_i$. □

2.2 Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng phân thức

Định lí 2.3. *Cho các n số thực $a_1, a_2, \cdots a_n$ và n số thực dương $b_1, b_2, \cdots, b_n$. Khi đó, ta có*

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$.

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng đa thức ta có

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{b_i}.\frac{a_i}{\sqrt{b_i}}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i}\right)$$

Hay

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \text{ (đpcm).}$$

□

Nguyễn Tất Thu

2.2 Các ví dụ

Ví dụ 2.18

(Bất đẳng thức Mincopski) Cho các $2n$ số thực $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2} \geqslant \sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+\cdots+(a_n+b_n)^2}.$$

Lời giải. Bình phương hai vế và rút gọn, ta có

$$\sqrt{\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)} \geqslant (a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n).$$

Đây chính là bất đẳng thức Cauchy-Schwarz dạng đa thức. Đẳng thức xảy ra khi $a_i = kb_i$. ■

Ví dụ 2.19

Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right) \geqslant (a+b)(b+c)(c+a).$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right) = \left(a^2+1\right)\left(1+b^2\right) \geqslant (a+b)^2.$$

Tương tự, ta cũng có

$$\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right) \geqslant (b+c)^2,\ \left(c^2+1\right)\left(a^2+1\right) \geqslant (a+c)^2.$$

Nhân ba bất đẳng thức trên theo vế ta được

$$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right) \geqslant (a+b)(b+c)(c+a).$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. ■

Nguyễn Tất Thu

Ví dụ 2.20

Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}\geqslant\sqrt{82}$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\left(a^2+\frac{1}{b^2}\right)\left(\frac{1}{9}+9\right)\geqslant\left(\frac{a}{3}+\frac{3}{b}\right)^2$$

hay

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{82}}\left(\frac{a}{3}+\frac{3}{b}\right).$$

Tương tự, ta cũng có

$$\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{82}}\left(\frac{b}{3}+\frac{3}{c}\right)\text{ và }\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{82}}\left(\frac{c}{3}+\frac{3}{a}\right).$$

Cộng ba bất đẳng thức theo vế ta có

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{82}}\left[\frac{a+b+c}{3}+3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right].$$

Lại có $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{9}{a+b+c}=9$ nên ta suy ra được

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{c^2}}+\sqrt{c^2+\frac{1}{a^2}}\geqslant\frac{3}{\sqrt{82}}\left(\frac{1}{3}+27\right)=\sqrt{82}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$. ■

Ví dụ 2.21

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh

rằng

$$2\left(a^2+b^2+c^2\right)+3\geqslant 9\left(\frac{1}{a^2+2}+\frac{1}{b^2+2}+\frac{1}{c^2+2}\right).$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\left(a^2+b^2+1\right)\left(1+1+c^2\right)\geqslant(a+b+c)^2=9$$

hay là

$$a^2+b^2+1\geqslant\frac{9}{c^2+2}.$$

Tương tự

$$b^2+c^2+1\geqslant\frac{9}{a^2+2} \text{ và } c^2+a^2+1\geqslant\frac{9}{b^2+2}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế, ta được

$$2\left(a^2+b^2+c^2\right)+3\geqslant 9\left(\frac{1}{a^2+2}+\frac{1}{b^2+2}+\frac{1}{c^2+2}\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$. ■

Ví dụ 2.22

Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}\leqslant\sqrt{2}(a+b+c).$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}=\sqrt{a}.\sqrt{a+\frac{1}{a}}+\sqrt{b}.\sqrt{b+\frac{1}{b}}+\sqrt{c}.\sqrt{c+\frac{1}{c}}$$

$$\leqslant\sqrt{(a+b+c)\left(a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}+c+\frac{1}{c}\right)}=\sqrt{2}(a+b+c).$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$. ■

Ví dụ 2.23

Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$a\sqrt{a^2+8bc}+b\sqrt{b^2+8ca}+c\sqrt{c^2+8ab}\leqslant 1.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\begin{aligned}VT&=\sqrt{a}.\sqrt{a^3+8abc}+\sqrt{b}.\sqrt{b^3+8abc}+\sqrt{c}.\sqrt{c^3+8abc}\\&\leqslant\sqrt{(a+b+c)\left(a^3+b^3+c^3+24abc\right)}.\end{aligned}$$

Mặt khác

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant a^3+b^3+c^3+24abc$$

Suy ra

$$VT\leqslant\sqrt{(a+b+c)(a+b+c)^3}=(a+b+c)^2=1.$$

Bài toán được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$. ■

Ví dụ 2.24

Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}}+\sqrt{\frac{2b}{b+c}}+\sqrt{\frac{2c}{c+a}}\leqslant 3.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\begin{aligned}VT^2&=\left(\sqrt{a+c}\sqrt{\frac{a}{(a+b)(a+c)}}+\sqrt{b+a}\sqrt{\frac{b}{(b+c)(b+a)}}+\sqrt{c+b}\sqrt{\frac{c}{(c+a)(c+b)}}\right)^2\\&\leqslant 2(a+b+c)\left(\frac{a}{(a+b)(a+c)}+\frac{b}{(b+a)(b+c)}+\frac{c}{(c+a)(c+b)}\right)\\&=\frac{4(a+b+c)[ab+bc+ca]}{(a+b)(b+c)(c+a)}.\end{aligned}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{4(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leqslant \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leqslant \frac{9}{8}.$$

Đây là một kết quả quen thuộc. ■

Ví dụ 2.25

Cho các số thực $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{a+2b^2}+\frac{b^2}{b+2c^2}+\frac{c^2}{c+2a^2} \geqslant 1.$$

Lời giải. Gọi P là vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{a^4}{a^3+2a^2b^2}+\frac{b^4}{b^3+2b^2c^2}+\frac{c^4}{c^3+2c^2a^2} \\ &\geqslant \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2}{a^3+b^3+c^3+2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)}. \end{aligned}$$

Với $a+b+c=3$ ta có

$\left(a^4+b^4+c^4\right)\left(a^2+b^2+c^2\right) \geqslant \left(a^3+b^3+c^3\right)^2$

$\left(a^3+b^3+c^3\right)(a+b+c) \geqslant \left(a^2+b^2+c^2\right)^2$

$3\left(a^2+b^2+c^2\right) \geqslant (a+b+c)^2.$

Nhân ba bất đẳng thức trên theo vế ta được

$$3\left(a^4+b^4+c^3\right) \geqslant (a+b+c)\left(a^3+b^3+c^3\right)$$

Hay $a^4+b^4+c^4 \geqslant a^3+b^3+c^3$. Do đó

$$\begin{aligned} \left(a^2+b^2+c^2\right)^2 &= a^4+b^4+c^4++2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right) \\ &\geqslant a^3+b^3+c^3+2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right). \end{aligned}$$

Vậy $P \geqslant 1$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$. ■

Ví dụ 2.26

Cho $a,b,c>0$ thỏa $a+b+c=2$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{4a+3bc}}+\frac{b}{\sqrt{4b+3ca}}+\frac{c}{\sqrt{4c+3ab}}\leqslant 1.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{4a+3bc}}+\frac{b}{\sqrt{4b+3ca}}+\frac{c}{\sqrt{4c+3ab}}\right)^2\leqslant(a+b+c)\left(\frac{a}{4a+3bc}+\frac{b}{4b+3ca}+\frac{c}{4c+3ab}\right)$$

$$=2\left(\frac{a}{4a+3bc}+\frac{b}{4b+3ca}+\frac{c}{4c+3ab}\right).$$

Ta chứng minh:

$$\frac{a}{4a+3bc}+\frac{b}{4b+3ca}+\frac{c}{4c+3ab}\leqslant\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{bc}{4a+3bc}+\frac{ca}{4b+3ca}+\frac{ab}{4c+3ab}\geqslant\frac{1}{3}\qquad(*)$$

Ta có

$$VT(*)\geqslant\frac{(ab+bc+ca)^2}{bc(4a+bc)+ca(4b+ca)+ab(4c+ab)}$$

Do

$$bc(4a+bc)+ca(4b+ca)+ab(4c+ab)=3(ab+bc+ca)^2.$$

Nên ta có: $VT(*)\geqslant\frac{1}{3}$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{2}{3}$. ■

Ví dụ 2.27

Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+c}\right)^2+\left(\frac{c}{c+a}\right)^2\geqslant\frac{3}{4}.$$

Lời giải. Vì $\frac{b}{a}.\frac{c}{b}.\frac{a}{c}=1$ nên tồn tại các số thực dương x,y,z sao cho

$$\frac{b}{a}=\frac{yz}{x^2},\ \frac{c}{b}=\frac{zx}{y^2},\ \frac{a}{c}=\frac{xy}{z^2}.$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{x^4}{\left(x^2+yz\right)^2}+\frac{y^4}{\left(y^2+zx\right)^2}+\frac{z^4}{\left(z^2+xy\right)^2}\geqslant\frac{3}{4}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\frac{x^4}{\left(x^2+yz\right)^2}+\frac{y^4}{\left(y^2+zx\right)^2}+\frac{z^4}{\left(z^2+xy\right)^2}\geqslant\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{\left(x^2+yz\right)^2+\left(y^2+zx\right)^2+\left(z^2+xy\right)^2}.$$

Ta chứng minh

$$\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{\left(x^2+yz\right)^2+\left(y^2+zx\right)^2+\left(z^2+xy\right)^2}\geqslant\frac{3}{4}$$

Biến đổi và rút gọn ta thu được bất đẳng thức

$$x^4+y^4+z^4+5\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)\geqslant 6xyz(x+y+z)\qquad(*).$$

Ta có

$$x^4+y^4+z^4\geqslant x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\geqslant xyz(x+y+z).$$

Nên suy ra $(*)$ đúng. Vậy bài toán được chứng minh. ■

Ví dụ 2.28

Cho các số thực $x,y,z>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2+zx+zy}}+\frac{y+z}{\sqrt{y^2+z^2+xy+xz}}+\frac{z+x}{\sqrt{z^2+x^2+yz+xy}}\leqslant 3.$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$VT^2\leqslant 3\left[\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+zx+yz}+\frac{(y+z)^2}{y^2+z^2+xy+xz}+\frac{(z+x)^2}{z^2+x^2+zy+yx}\right].$$

Mặt khác

$$\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+zx+yz}=\frac{(x+y)^2}{x(x+z)+y(y+z)}\leqslant\frac{x^2}{x(x+z)}+\frac{y^2}{y(y+z)}=\frac{x}{x+z}+\frac{y}{y+z}$$

Tương tự

$$\frac{(y+z)^2}{y^2+z^2+xy+xz}\leqslant\frac{y}{y+x}+\frac{z}{z+x}\quad\text{và}\quad\frac{(z+x)^2}{z^2+x^2+zy+yx}\leqslant\frac{z}{z+y}+\frac{x}{x+y}$$

Suy ra $VT^2\leqslant 9\Leftrightarrow VT\leqslant 3$, từ đây ta có đpcm. ■

Ví dụ 2.29

(VQB Cẩn Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=6$ và $a^2+b^2+c^2=14$. Chứng minh rằng

$$2\leqslant\frac{4a+b}{c}\leqslant\frac{31}{2}.$$

Lời giải. Ta có

$$\frac{4a+b}{c}\geqslant 2\Leftrightarrow -4a-b+2c\leqslant 0\Leftrightarrow 3a+6b+9c\leqslant 7(a+b+c)=42\qquad(1).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$3a+6b+9c\leqslant\sqrt{\left(3^2+6^2+9^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)}=42.$$

Suy ra (1) đúng. Đẳng thức xảy ra khi $a=1,b=2,c=3$.
Tương tự

$$\frac{4a+b}{c}\leqslant\frac{31}{2}\Leftrightarrow 8a+2b-31c\leqslant 0\Leftrightarrow 57a+51b+18c\leqslant 49(a+b+c)=294\qquad(2).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$57a+51b+18c\leqslant\sqrt{\left(57^2+51^2+18^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)}=294$$

Hay (2) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=\frac{19}{7},b=\frac{17}{7},c=\frac{6}{7}$. ■

Nguyễn Tất Thu

2.2 *Bài tập*

Bài tập 2.25. Cho các số thực dương a,b,c thỏa $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b+2c}+\frac{b^3}{c+2a}+\frac{c^3}{a+2b}\geqslant 1.$$

Bài tập 2.26. Cho các số thực dương a,b,c có tích bằng 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3+b^3+1}+\frac{1}{b^3+c^3+1}+\frac{1}{c^3+a^3+1}\leqslant 1.$$

Bài tập 2.27. Cho các số thực dương x,y,z thỏa $x+y+z\leqslant 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất:

$$P=\sqrt{4x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{4y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{4z^2+\frac{1}{z^2}}.$$

Bài tập 2.28. Cho x,y thỏa $\begin{cases} x^2+xy+y^2=16 \\ y^2+yz+z^2=3 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $xy+yz+zx\leqslant 8$.

Bài tập 2.29. Cho $a,b>0$. Chứng minh rằng:

$$\left(4\sqrt{a}+3\sqrt{b}\right)\left(3\sqrt{a}+4\sqrt{b}\right)\leqslant 25(a+b).$$

Bài tập 2.30. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa: $a^2+b^2+c^2\geqslant 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{\sqrt{b^2+c^2+7}}+\frac{b^3}{\sqrt{c^2+a^2+7}}+\frac{c^3}{\sqrt{a^2+b^2+7}}\geqslant 1.$$

Bài tập 2.31. Cho các số thực dương a,b,c có tổng bằng 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{4a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{a^2+4b^2+c^2}+\frac{1}{a^2+b^2+4c^2}\leqslant\frac{1}{2}.$$

Nguyễn Tất Thu

Bài tập 2.32. Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)}+\frac{b^2}{(2b+a)(2b+c)}+\frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)}\leqslant\frac{1}{3}.$$

Bài tập 2.33. Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a+2b^2}+\frac{b^2}{b+2c^2}+\frac{c^2}{c+2a^2}\geqslant 1.$$

Bài tập 2.34. Cho các số thực $x,y,z>0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2+zx+zy}}+\frac{y+z}{\sqrt{y^2+z^2+xy+xz}}+\frac{z+x}{\sqrt{z^2+x^2+yz+xy}}\leqslant 3.$$

Bài tập 2.35. Cho ba số thực dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{4x+5}{x^3+xy^2+3xyz}+\frac{4y+5}{y^3+yz^2+3xyz}+\frac{4z+5}{z^3+zx^2+3xyz}\geqslant\frac{162}{x^2+y^2+z^2+27}.$$

Bài tập 2.36. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{(b+2c)^2(a+b)}+\frac{b^2}{(c+2a)^2(b+c)}+\frac{c^2}{(a+2b)^2(c+a)}\geqslant\frac{1}{2}.$$

Bài tập 2.37. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2\leqslant 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b+c).$$

Bài tập 2.38. Cho $a,b,c>0$ thỏa $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{b+c}{\sqrt{a}}+\frac{c+a}{\sqrt{b}}+\frac{a+b}{\sqrt{c}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+3.$$

Bài tập 2.39. Cho $a,b,c\in(1;2)$. Chứng minh rằng

$$\frac{b\sqrt{a}}{4b\sqrt{c}-c\sqrt{a}}+\frac{c\sqrt{b}}{4c\sqrt{a}-a\sqrt{b}}+\frac{a\sqrt{c}}{4a\sqrt{b}-b\sqrt{c}}\geqslant 1.$$

Nguyễn Tất Thu

Bài tập 2.40. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+b}{b+c}+\frac{b^2+c}{c+a}+\frac{c^2+a}{a+b}\geqslant 2.$$

Bài tập 2.41. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b}{b+c}.\frac{a}{2a+b+c}+\frac{b+c}{c+a}.\frac{b}{2b+c+a}+\frac{c+a}{a+b}.\frac{c}{2c+a+b}\geqslant\frac{3}{4}.$$

Bài tập 2.42. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^3}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^3}{c^2-ca+a^2}\geqslant\frac{3(ab+bc+ca)}{a+b+c}.$$

Bài tập 2.43. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{c+a+2b}\leqslant\frac{a+b+c}{4}.$$

Bài tập 2.44. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a+\sqrt{(a+b)(a+c)}}+\frac{b}{b+\sqrt{(b+c)(b+a)}}+\frac{c}{c+\sqrt{(c+a)(c+b)}}\leqslant 1.$$

Bài tập 2.45. Cho $x,y,z>-1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2}+\frac{1+y^2}{1+z+x^2}+\frac{1+z^2}{1+x+y^2}\leqslant 2.$$

Bài tập 2.46. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\left(a^2+2\right)\left(b^2+2\right)\left(c^2+2\right)\geqslant 9(ab+bc+ca).$$

Bài tập 2.47. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{\left(2a^2+b^2\right)\left(2a^2+c^2\right)}+\frac{b^3}{\left(2b^2+c^2\right)\left(2b^2+a^2\right)}+\frac{c^3}{\left(2c^2+a^2\right)\left(2c^2+b^2\right)}\leqslant\frac{1}{a+b+c}.$$

Bài tập 2.48. Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2-a}+\frac{1}{2-b}+\frac{1}{2-c}\geqslant 3.$$

Nguyễn Tất Thu

Bài tập 2.49. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{4a+4b+c}+\frac{b}{4b+4c+a}+\frac{c}{4c+4a+b}\leqslant\frac{1}{3}.$$

Bài tập 2.50. Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+x+x^2}+\frac{1}{1+y+y^2}+\frac{1}{1+z+z^2}\geqslant 1.$$

Bài tập 2.51. Cho $x,y,z>0$ thỏa mãn $xyz=8$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{x^2+2x+4}+\frac{y^2}{y^2+2y+4}+\frac{z^2}{z^2+2z+4}\geqslant 1.$$

Bài tập 2.52. Cho các số thực $x,y,z\neq 1$ và $xyz=1$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{y}{y-1}\right)^2+\left(\frac{z}{z-1}\right)^2\geqslant 1.$$

2.3 Bất đẳng thức Schur

2.3 Bất đẳng thức Schur

Định lí 2.4. *Cho các số thực không âm x,y,z và số thực dương r. Khi đó, ta có bất đẳng thức sau*

$$x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-x)(y-z)+z^r(z-x)(z-y)\geqslant 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$ hoặc $c=0, a=b$ và các hoán vị.

Chứng minh. Vì bất đẳng thức cần chứng minh là đối xứng ba biến nên ta giả sử $x\geqslant y\geqslant z$, khi đó $z^r(z-x)(z-y)\geqslant 0$ và

$$x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-x)(y-z)\geqslant(x-y)\left(x^r(y-z)-y^r(y-z)\right)=(x-y)(y-z)(x^r-y^r)\geqslant 0.$$

Từ hai bất đẳng thức trên ta suy ra đpcm. □

Nguyễn Tất Thu

2.3 Các trường hợp đặc biệt

- Xét $r=1$ ta có các dạng sau

  1. $x^3+y^3+z^3+3xyz \geqslant xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)$
  2. $4(a^3+b^3+c^3)+15abc \geqslant (a+b+c)^3$
  3. $xyz \geqslant (x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)$
  4. $x^2+y^2+z^2+\dfrac{9xyz}{x+y+z} \geqslant 2(xy+yz+zx)$
  5. $(x+y+z)^3+9xyz \geqslant 4(x+y+z)(xy+yz+zx)$

- $r=2$ ta có các dạng sau

  1. $x^4+y^4+z^4+xyz(x+y+z) \geqslant xy(x^2+y^2)+yz(y^2+z^2)+zx(z^2+x^2)$
  2. $6xyz(x+y+z) \geqslant \left[2(xy+yz+zx)-(x^2+y^2+z^2)\right](x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$.

2.3 Bất đẳng thức Schur suy rộng

Định lí 2.5. *Cho các số thực dương a,b,c,x,y,z sao cho các bộ (a,b,c) và (x,y,z) là các bộ đơn điệu. Khi đó, ta có bất đẳng thức*

$$a(x-y)(x-z)+b(y-z)(y-x)+c(z-x)(z-y) \geqslant 0.$$

Việc chứng minh bất đẳng thức này tương tự như chứng minh bất đẳng thức Schur ở trên.

2.3 Các ví dụ

Ví dụ 2.30

Cho các số thực không âm a,b,c. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{(a+b)^3}{ab(4a+4b+c)}}+\sqrt{\frac{(b+c)^3}{bc(4b+4c+a)}}+\sqrt{\frac{(c+a)^3}{ca(4c+4a+b)}} \geqslant 2\sqrt{2}.$$

Lời giải. Gọi P là vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a+b+c=3$. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\sqrt{\frac{(a+b)^3}{8ab(4a+4b+c)}}+\sqrt{\frac{(a+b)^3}{8ab(4a+4b+c)}}+\frac{ab(4a+4b+c)}{27}\geqslant\frac{1}{2}(a+b)$$

Suy ra

$$\sqrt{\frac{(a+b)^3}{8ab(4a+4b+c)}}+\frac{ab(4a+4b+c)}{54}\geqslant\frac{1}{4}(a+b).$$

Tương tự

$$\sqrt{\frac{(b+c)^3}{8bc(4b+4c+a)}}+\frac{bc(4b+4c+a)}{54}\geqslant\frac{1}{4}(b+c)$$

và

$$\sqrt{\frac{(c+a)^3}{8ca(4c+4a+b)}}+\frac{ca(4c+4a+b)}{54}\geqslant\frac{1}{4}(c+a).$$

Cộng ba bất đẳng thức trên ta có

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}P+A\geqslant B.$$

Với

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{54}\left[ab(4a+4b+c)+bc(4b+4c+a)+ca(4c+4a+b)\right]\\&=\frac{1}{54}\left[4ab(a+b)+4bc(b+c)+4ca(c+a)+3abc\right]\\&=\frac{1}{54}\left[4(a+b+c)(ab+bc+ca)-9abc\right]\leqslant\frac{1}{54}(a+b+c)^3=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

và

$$B=\frac{1}{4}.2(a+b+c)=\frac{3}{2}.$$

Suy ra

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}P\geqslant\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1\Rightarrow P\geqslant 2\sqrt{2}.$$

Bài toán được chứng minh. ■

Nguyễn Tất Thu

Ví dụ 2.31

(APMO 2004) Cho các số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geqslant 9(ab+bc+ca).$$

Lời giải. Ta có

$$VT=a^2b^2c^2+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+4(a^2+b^2+c^2)+8.$$

Mặt khác

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+3=a^2b^2+1+b^2c^2+1+c^2a^2+1\geqslant 2(ab+bc+ca)$$

và

$$a^2b^2c^2+2=a^2b^2c^2+1+1\geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=\frac{3abc}{\sqrt[3]{abc}}$$

$$\geqslant \frac{9abc}{a+b+c}\geqslant 2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2).$$

Suy ra

$$VT\geqslant 2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)+2.2(ab+bc+ca)+4(a^2+b^2+c^2)$$

$$=6(ab+bc+ca)+3(a^2+b^2+c^2)\geqslant 6(ab+bc+ca)+3(ab+bc+ca)\geqslant 9(ab+bc+ca).$$

Bài toán được chứng minh. ■

Ví dụ 2.32

(VMO 2014) Cho $a,b,c\geqslant 0$. Chứng minh rằng

$$3(a^2+b^2+c^2)\geqslant \mathscr{P}\geqslant (a+b+c)^2,$$

với $\mathscr{P}=(a+b+c)\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2.$

Lời giải. Ta có

$$3(a^2+b^2+c^2) \geqslant \mathscr{P} \Leftrightarrow a+b+c \geqslant \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}.$$

Bất đẳng thức này là kết quả quen thuộc.
Đặt $x=\sqrt{a}$, $y=\sqrt{b}$, $z=\sqrt{c}$. Khi đó, bất đẳng thức

$$\mathscr{P} \geqslant (a+b+c)^2 \Leftrightarrow \sum x^4 + xyz\sum x + \sum xy(x^2+y^2) \geqslant 4\sum x^2y^2 \qquad (1)$$

Sử dụng bất đẳng thức Schur (với trường hợp $r=2$) ta có

$$\sum x^4 + xyz\sum x \geqslant \sum xy(x^2+y^2)$$

do đó

$$VT(1) \geqslant 2\sum xy(x^2+y^2) \geqslant 2.\sum xy.2xy = 4\sum x^2y^2.$$

Hay (1) được chứng minh. ■

Ví dụ 2.33

Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+bc}{a^2(b+c)}+\frac{b^2+ca}{b^2(c+a)}+\frac{c^2+ab}{c^2(a+b)} \geqslant \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

Lời giải. Ta có

$$\frac{a^2+bc}{a^2(b+c)}-\frac{1}{a}=\frac{a^2+bc-a(b+c)}{a^2(b+c)}=\frac{(a-b)(a-c)}{a^2(b+c)}.$$

Do đó, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$x(a-b)(a-c)+y(b-c)(b-a)+z(c-a)(c-b) \geqslant 0 \qquad (1).$$

Với $x=\dfrac{1}{a^2(b+c)}$, $y=\dfrac{1}{b^2(c+a)}$, $z=\dfrac{1}{c^2(a+b)}$.
Giả sử $a>b>c$, ta có $\dfrac{1}{a^2(b+c)}-\dfrac{1}{b^2(c+a)}=\dfrac{ab(b-a)+c(b^2-a^2)}{a^2b^2(b+c)(c+a)}>0$
hay $x<y$.
Do đó, bộ (x,y,z) là bộ đơn điệu giảm. Do đó, theo bất đẳng thức Schur suy rộng, ta có (1) đúng. ■

Nguyễn Tất Thu

2.3 Bài tập

Bài tập 2.53. (Hello IMO 2007- Trần Nam Dũng) Chứng minh rằng với mọi $a,b,c \geqslant 0$,ta có:

$$2(a^2+b^2+c^2)+abc+8 \geqslant 5(a+b+c).$$

HD: Sử dụng bất đẳng thức AM-GM,ta có:

$$\begin{aligned}
&12(a^2+b^2+c^2)+6abc+48-30(a+b+c)\\
&=12(a^2+b^2+c^2)+3(2abc+1)+45-5.2.3(a+b+c)\\
&\geqslant 12(a^2+b^2+c^2)+9\sqrt[3]{a^2b^2c^2}+45-5.((a+b+c)^2+9)\\
&=7(a^2+b^2+c^2)+\frac{9abc}{\sqrt[3]{abc}}-10(ab+bc+ca)\\
&\geqslant 7(a^2+b^2+c^2)+\frac{27}{a+b+c}-10(ab+bc+ca)
\end{aligned}$$

Mặt khác sử dụng bất đẳng thức Schur,

$$\frac{9}{a+b+c} \geqslant 4(ab+bc+ca)-(a+b+c)^2 = 2(ab+bc+ca)-(a^2+b^2+c^2)$$

Do đó

$$\begin{aligned}
&7(a^2+b^2+c^2)+\frac{27}{a+b+c}-10(ab+bc+ca)\\
&\geqslant 7(a^2+b^2+c^2)+6(ab+bc+ca)-3(a^2+b^2+c^2)-10(ab+bc+ca)\\
&=4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

Bài tập 2.54. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3 \geqslant 2(a+b+c).$$

HD:

Đặt $x=\frac{1}{a}$, $y=\frac{1}{b}$, $z=\frac{1}{c}$. Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$x^2+y^2+z^2+3 \geqslant 2(xy+yz+zx)$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)(x^2+y^2+z^2+3) \geqslant 2(x+y+z)(xy+yz+zx)$$

Hay

$$x^3+y^3+z^3+3(x+y+z) \geqslant x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)+6 \qquad (1).$$

Ta có

$$x^3+y^3+z^3+3(x+y+z)\geqslant x^3+y^3+z^3+9=x^3+y^3+z^3+3xyz+6\geqslant VP(1).$$

Vậy bài toán được chứng minh.

Bài tập 2.55. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}\geqslant a+b+c.$$

Bài tập 2.56. Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$a^3+b^3+c^3+3abc\geqslant ab\sqrt{2(a^2+b^2)}+bc\sqrt{2(b^2+c^2)}+ca\sqrt{2(c^2+a^2)}.$$

Bài tập 2.57. (Iran 1996) Cho các số thực dương x,y,z. Chứng minh rằng

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right)\geqslant\frac{9}{4}.$$

2.4 Hướng dẫn, đáp số

2.5 Tài liệu tham khảo

1. Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh, Sử dụng bất đẳng thức AM-GM để chứng minh bất đẳng thức, NXB ĐHSP.
2. Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh, Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz để chứng minh bất đẳng thức, NXB ĐHSP.
3. Tuyển tập các đề thi HSGQG THPT từ năm 1990-2006, NXBGD
4. Các chuyên đề trên mạng và các lời giải và bình luận đề thi VMO, VN TST của Thầy Trần Nam Dũng chủ biên.

Nguyễn Tất Thu